ENSA d'Al-Hoceima — Année 2019/2020
AP-I, Première Année, — Semestre 2
Algèbre Linéaire, — TD5

Solution de la Série $\mathrm{N}^o 5$: Matrices, changement de base : Coordonnées sphériques

Exercice 1
On considère $\mathbb{P}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1 + X, \quad P_2 = (1 + X)^2, \quad \text{et} \quad P_3 = (1 + X)^3.$$

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est un système libre dans $\mathbb{P}_3[X]$
2. Soit $P = -3X + X^3$, écrire P comme combinaison linéaire dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3).
3. Que peut-on déduire ?
4. Trouver une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

Solution : Considèrons l'espace vectoriel $\mathbb{P}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3. Soient

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1 + X, \quad P_2 = (1 + X)^2, \quad \text{et} \quad P_3 = (1 + X)^3.$$

1. Montrons que le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{P}_3[X]$: en effet, comme le système $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_3[X]$, alors $\dim(\mathbb{P}_3[X]) = 4$, alors il suffit de montrer que le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre. D'abord, on a

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= 1 + X \\ P_2 &= 1 + 2X + X^2 \\ P_3 &= 1 + 3X + 3X^2 + X^3. \end{aligned}$$

Soient α, β, γ et λ des réels tels que $\alpha\, P_0 + \beta\, P_1 + \gamma\, P_2 + \lambda\, P_3 = 0$, alors montrons que $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$? Par calcul, on a

$$\alpha\, P_0 + \beta\, P_1 + \gamma\, P_2 + \lambda\, P_3 = (\alpha + \beta + \gamma + \lambda)1 + (\beta + 2\gamma + 3\lambda) + (\gamma + 3\lambda)X^2 + \lambda\, X^3 = 0$$

comme $\{1, X, X^2, X^3\}$ est libre, alors

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \lambda = 0 \\ \beta + 2\gamma + 3\lambda = 0 \\ \gamma + 3\lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda = 0 \\ \gamma = -3\lambda = 3 - \times 0 = 0 \\ \beta = -2\gamma - 3\lambda = -2 \times 0 - 3 \times 0 = 0 \\ \alpha = -\beta - \gamma - \lambda = 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned} \right.$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$; d'où le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre ; finalement le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_3[X]$.

2. Soit $P = -3X + X^3$, écrivons P comme combinaison linéaire dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3) : en effet, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_0 & = & 1 \\ P_1 & = & 1+X \\ P_2 & = & 1+2X+X^2 \\ P_3 & = & 1+3X+3X^2+X^3. \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & P_0 \\ X & = & P_1 - 1 = P_1 - P_0 \\ X^2 & = & P_2 - 1 - 2X = P_2 - P_0 - 2(P_1 - P_0) = P_2 - 2P_1 + P_0 \\ X^3 & = & P_3 - 1 - 3X - 3X^2 = P_3 - P_0 - 3(P_1 - P_0) - 3(P_2 - 2P_1 + P_0) \\ & = & P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0 \end{array}\right.$$

alors la combinaison linéaire du polynôme $P = -3X + X^3$ dans le système (P_0, P_1, P_2, P_3) est

$$P = -3X + X^3 = -3(P_1 - P_0) + P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0 = -3P_1 + 3P_0 + P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0$$

d'où $P = 2P_0 + 0P_1 - 3P_2 + 1P_3$.

3. Trouvons une matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

d'après les calculs de la question 2. on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_0 & = & 1 + 0\,X + 0\,X^2 + 0\,X^3 \\ P_1 & = & 1 + 1\,X + 0\,X^2 + 0\,X^3 \\ P_2 & = & 1 + 2X + 1\,X^2 + 0\,X^3 \\ P_3 & = & 1 + 3X + 3X^2 + X^3. \end{array}\right.$$

alors

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & 1P_0 + 0P_1 + 0P_2 + 0P_3 \\ X & = & -1P_0 + 1P_1 + 0P_2 + 0P_3 \\ X^2 & = & 1P_0 - 2P_1 + 1P_2 + 0P_3 \\ X^3 & = & -1P_0 + 3P_1 - 3P_2 + 1P_3 \end{array}\right.$$

alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice B est la matrice inverse de A, notée A^{-1}, soit $AA^{-1} = A^{-1}A = I_4$ où I_4 est la matrice identité de taille 4×4, soit

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exercice 2

Soit E l'espace physique muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi/2]$. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon ρ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}) = \varphi$ et M' la projection orthogonale de M sur le plan (xOy) tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$

1. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
3. Trouver les expressions des vecteurs $\vec{e_\rho} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$, $\vec{e_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ et $\vec{e_\varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$.
4. Calculer $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en fonction de $\vec{e_\rho}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\varphi}$.
5. Que peut-on déduire ?

Solution : Soit E l'espace physique muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi/2]$. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon ρ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}) = \varphi$ et M' la projection orthogonale de M sur le plan (xOy) tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \theta$

1. Déterminons les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: D'après la Figure (1) on peut écrire
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM'} + Z_M \vec{k}$$

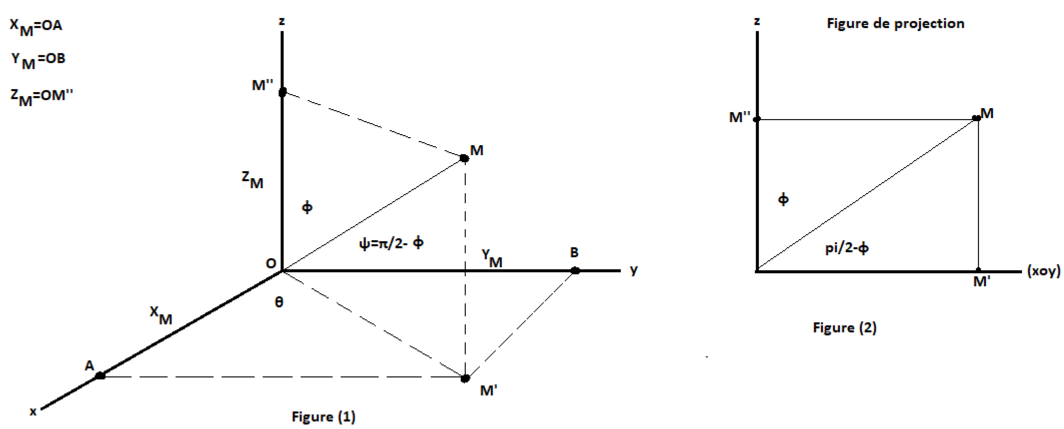

FIGURE 1 – La figure décrit les hypothèses de l'exercice

d'après Figure (2), le triangle $(OM''M)$ est rectangle en M'' dont l'hypothénuse est $OM = \rho$, alors

$$\cos(\varphi) = \frac{OM''}{OM} = \frac{Z_M}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad Z_M = \rho\, \cos(\varphi) \quad (\heartsuit)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM'}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad OM' = \rho\, \sin(\varphi) \quad (\spadesuit)$$

ceci d'une part et d'autre par le triangle (OAM') est rectangle en A dont l'hypothénuse est OM', alors

$$\begin{array}{rcl} \sin(\theta) & = & \dfrac{AM'}{OM'} = \dfrac{Y_M}{OM'} \quad \Leftrightarrow \quad Y_M = OM' \sin(\theta) \\ \cos(\theta) & = & \dfrac{OA}{OM'} = \dfrac{X_M}{OM'} \quad \Leftrightarrow \quad X_M = OM' \cos(\theta) \end{array}$$

d'après (♠) on a $OM' = \rho \sin(\varphi)$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} X_M & = & OM' \cos(\theta) = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ Y_M & = & OM' \sin(\theta) = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ Z_M & = & \rho \cos(\varphi) \end{array}$$

Remarque : si on travaillait avec $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, alors les coordonnées seraient

$$\begin{array}{rcl} X_M & = & OM' \cos(\theta) = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ Y_M & = & OM' \sin(\theta) = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ Z_M & = & \rho \sin(\varphi) \end{array}$$

car tout simplement lorsqu'on remplace φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, alors

$$\begin{array}{rcl} \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) & = & \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(\varphi) + \sin(\frac{\pi}{2}) \sin(\varphi) = 0 \cos(\varphi) + 1 \sin(\varphi) = \sin(\varphi) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) & = & \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(\varphi) - \cos(\frac{\pi}{2}) \sin(\varphi) = 1 \cos(\varphi) + 0 \sin(\varphi) = \cos(\varphi) \end{array}$$

2. Déterminons le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$: d'après la question précédente, on a

$$\begin{array}{rcl} X_M & = & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ Y_M & = & \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ Z_M & = & \rho \cos(\varphi) \end{array}$$

d'où

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{i} + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{j} + \rho \cos(\varphi) \overrightarrow{k}.$$

3. Les expressions des vecteurs $\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$, $\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$: on considère $\overrightarrow{OM}$ comme étant une application dépendant de trois variables (ρ, θ, φ), alors

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{e_\rho} & = & \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{i} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{j} + \cos(\varphi) \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_\theta} & = & \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{i} + \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{j} + 0 \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_\varphi} & = & \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \overrightarrow{i} + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \overrightarrow{j} - \rho \sin(\varphi) \overrightarrow{k} \end{array}$$

On remarque que $\overrightarrow{e_\rho}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ dans le sens où

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{e_\rho}.$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_\rho} \\ \overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{e_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & 0 \\ \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{pmatrix}$$

la matrice

$$A(\rho,\theta,\varphi)=\left(\begin{array}{ccc}\cos(\theta)\,\sin(\varphi) & \sin(\theta)\,\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\\ -\rho\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) & \rho\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) & 0\\ \rho\,\cos(\theta)\,\cos(\varphi) & \rho\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi) & -\rho\,\sin(\varphi)\end{array}\right)$$

s'appelle la matrice de passage du système $\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}$ au système $\{\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi}\}$.

4. Calculons $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ en fonction de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$. D'abord on effectue un changement sur les vecteurs

$$\begin{array}{rcl}\dot{e}_\rho & = & \overrightarrow{e_\rho}=\cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{i}+\sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{j}+\cos(\varphi)\,\overrightarrow{k}\\ \dot{e}_\theta & = & \dfrac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\overrightarrow{e_\theta}=-\sin(\theta)\,\overrightarrow{i}+\cos(\theta)\,\overrightarrow{j}\\ \dot{e}_\varphi & = & \dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{e_\varphi}=\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{i}+\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{j}-\sin(\varphi)\,\overrightarrow{k}\end{array}$$

alors on a

$$\overrightarrow{k}=\cos(\varphi)\,\dot{e}_\rho-\sin(\varphi)\,\dot{e}_\varphi=\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho}-\frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

et on a aussi

$$\begin{array}{rcl}\sin(\varphi)\,\dot{e}_\rho+\cos(\varphi)\,\dot{e}_\varphi & = & \cos(\theta)\,\overrightarrow{i}+\sin(\theta)\,\overrightarrow{j}\\ \dot{e}_\theta & = & -\sin(\theta)\,\overrightarrow{i}+\cos(\theta)\,\overrightarrow{j}\end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{j} & = & \sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,\dot{e}_\rho+\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,\dot{e}_\varphi+\cos(\theta)\,\dot{e}_\theta\\ \overrightarrow{j} & = & \sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho}+\dfrac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{1}{\rho}\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}\end{array}$$

de la même façon il vient

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{i} & = & \cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,\dot{e}_\rho+\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,\dot{e}_\varphi-\sin(\theta)\,\dot{e}_\theta\\ \overrightarrow{i} & = & \cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho}-\dfrac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{1}{\rho}\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}\end{array}$$

finalement

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{i} & = & \cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho}-\dfrac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{1}{\rho}\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}\\ \overrightarrow{j} & = & \sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho}+\dfrac{1}{\rho\,\sin(\varphi)}\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{1}{\rho}\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}\\ \overrightarrow{k} & = & \cos(\varphi)\,\overrightarrow{e_\rho}-\dfrac{1}{\rho}\sin(\varphi)\,\overrightarrow{e_\varphi}\end{array}$$

5. On peut en déduire que le passage de la base cartésienne $\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}$ à la base sphérique $\{\overrightarrow{e_\rho};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_\varphi}\}$ se fait à travers la matrice

$$A(\rho,\theta,\varphi)=\left(\begin{array}{ccc}\cos(\theta)\,\sin(\varphi) & \sin(\theta)\,\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\\ -\rho\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) & \rho\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) & 0\\ \rho\,\cos(\theta)\,\cos(\varphi) & \rho\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi) & -\rho\,\sin(\varphi)\end{array}\right)$$

et on déduit que le système $\{\overrightarrow{e_\rho};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_\varphi}\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$; et, à chaque point M de $\mathbb{R}^3$ relativement au repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on associe un repère sphérique $(M;\overrightarrow{e_\rho};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_\varphi})$.
Voir la figure suivante

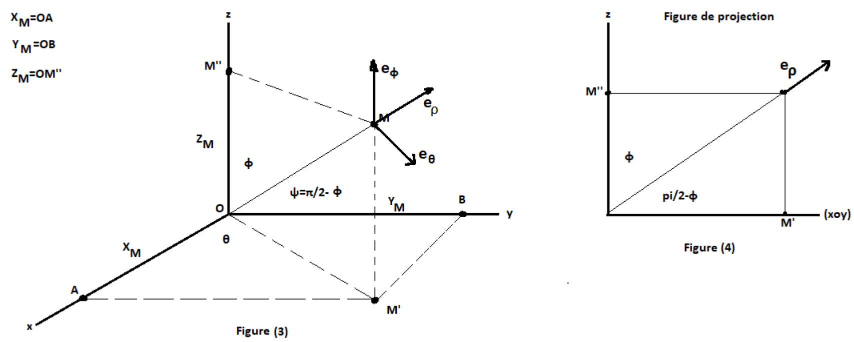

FIGURE 2 – La figure montre la base sphérique et la direction de ses vecteurs

$\square$

Exercice 3
Soit $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v = -5e_1 + 2e_2 + e_3$ et $w = -e_1 - 3e_2 + e_3$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$. Que peut-on déduire ?
2. Calculer $X = u + v$ et $Y = u + 3v - 5w$ en fonction de e_1, e_2 et e_3. Le système $\{X, Y, w\}$ est-il libre ?
3. Vérifier que le système $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer e_1, e_2 et e_3 en fonction de u, v et w.
5. Calculer $\det_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$ et $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w).\det_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$.
6. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que
$$f(e_1) = u,\ f(e_2) = v \text{ et } f(e_3) = w,$$
$$g(u) = e_1,\ g(v) = e_2 \text{ et } g(w) = e_3.$$
   (a) Déterminer les matrices $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(g)$.
   (b) En utilisant les questions précédentes, montrer que f et g sont des automorphismes d'espaces vectoriels.
   (c) En utilisant les questions précédentes, déduire A^{-1} et B^{-1}.

Solution : Soit $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v = -5e_1 + 2e_2 + e_3$ et $w = -e_1 - 3e_2 + e_3$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculons $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$: on a
$$(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
alors
$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(2+3) + 5(2+9) - (2-6) \end{aligned}$$

donc $\det_{\mathcal{B}}(u,v,w) = 64 \neq 0$; d'où on déduit que les vecteurs u, v et w sont linéairement indépendants ; c'est à dire que le système $\{u;v;w\}$ est un système libre dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension $3 = \mathrm{Card}\{u;v;w\}$; d'où le système $\{u;v;w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculons $X = u+v$ et $Y = u+3v-5w$ en fonction de e_1, e_2 et e_3 :

$$\begin{aligned} X &= u+v = e_1+2e_2+3e_3-5e_1+2e_2+e_3 \\ &= (1-5)e_1+(2+2)e_2+(3+1)e_3 = -4e_1+4e_2+4e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= u+3v-5w = e_1+2e_2+3e_3+3(-5e_1+2e_2+e_3)-5(-e_1-3e_2+e_3) \\ &= (1-15+5)e_1+(2+6+15)e_2+(3+3-5)e_3 = -9e_1+23e_2+e_3 \end{aligned}$$

On a

$$(X,Y,w) = \begin{pmatrix} -4 & -9 & -1 \\ 4 & 23 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors le déterminant du système est

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(X,Y,w) = \begin{vmatrix} -4 & -9 & -1 \\ 4 & 23 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= -4\begin{vmatrix} 23 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 23 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -104+144+88 \end{aligned}$$

donc $\det_{\mathcal{B}}(X,Y,w) = 128 \neq 0$, d'où les vecteurs X, Y et w sont linéairement indépendants, soit le système $\{X,Y,w\}$ est libre.

3. Vérifons que le système $\mathcal{B}' = \{u,v,w\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$: d'après la question 1., on a montré que le système $\{u;v;w\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension $3 = \mathrm{Card}\{u;v;w\}$; d'où le système $\{u;v;w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Calculons e_1, e_2 et e_3 en fonction de u, v et w : on a $u = e_1+2e_2+3e_3$, $v = -5e_1+2e_2+e_3$ et $w = -e_1-3e_2+e_3$, alors

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

où $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible puisque $\det(M) = 64 \neq 0$; donc il vient

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

il reste donc à calculer A^{-1} qu'on calcule par la formule $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\ \mathrm{Com}(M^T)$. La transposée M^T est

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ \Gamma_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11,\ \Gamma_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \\ \Gamma_{21} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ \Gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ \Gamma_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \\ \Gamma_{31} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 17,\ \Gamma_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1,\ \Gamma_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \end{aligned}$$

donc
$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \operatorname{Com}(M^T) = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 5 & -11 & -4 \\ 4 & 4 & -16 \\ 17 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$
on obtient
$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 5 & -11 & -4 \\ 4 & 4 & -16 \\ 17 & 1 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 5u-11v-4w \\ 4u+4v-16w \\ 17u+1v+12 \end{pmatrix}$$
d'où
$$\left\{ \begin{array}{lll} e_1 & = & \frac{1}{64}(5u-11v-4w) \\ e_2 & = & \frac{1}{64}(4u+4v-16w) \\ e_3 & = & \frac{1}{64}(17u+1v+12) \end{array} \right. .$$

5. Calculons $\det_{\mathcal{B}'}(e_1,e_2,e_3)$ et $\det_{\mathcal{B}}(u,v,w).\det_{\mathcal{B}'}(e_1,e_2,e_3)$: relativement à la base $\mathcal{B}' = \{u,v,w\}$, on a
$$(e_1,e_2,e_3) = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 17 \\ -11 & 4 & 1 \\ -4 & -16 & 12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det_{\mathcal{B}'}(e_1,e_2,e_3) = \frac{1}{64^3}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 17 \\ -11 & 4 & 1 \\ -4 & -16 & 12 \end{vmatrix}$$
car si U est une matrice de taille $(n\times n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\det(\lambda U) = \lambda^n \det(U)$.
Or avec un calcul simple du déterminant on trouve
$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 17 \\ -11 & 4 & 1 \\ -4 & -16 & 12 \end{vmatrix} = 4096 = 64^2$$
d'où $\det_{\mathcal{B}'}(e_1,e_2,e_3) = \frac{1}{64^3} \times 4096 = \frac{64^2}{64^3} = \frac{1}{64}$.
Finalement, on obtient
$$\det_{\mathcal{B}}(u,v,w).\det_{\mathcal{B}'}(e_1,e_2,e_3) = 64 \times \frac{1}{64} = 1$$
soit $\det_{\mathcal{B}'}(e_1,e_2,e_3) = \dfrac{1}{\det_{\mathcal{B}}(u,v,w)}$.

6. Considérons deux endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ tels que
$$f(e_1) = u,\ f(e_2) = v \text{ et } f(e_3) = w,$$
$$g(u) = e_1,\ g(v) = e_2 \text{ et } g(w) = e_3.$$
   (a) Déterminons les matrices $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(g)$. : en effet,
$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$
$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} g(u) & g(v) & g(w) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{7}{64} & -\frac{11}{64} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ \frac{17}{64} & \frac{1}{64} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array}$$

(b) D'aprèsles questions précédentes, on remarque que

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M \quad \text{et} \quad B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(g) = M^{-1}$$

et que $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = 64 \neq 0$ et $\det(B) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{64} \neq 0$, alors A et B sont inversibles ; donc f et g sont bijectifs ;
comme f et g sont des endomorphismes bijectifs, d'où f et g sont des automorphismes d'espaces vectoriels.

(c) D'après les questions précédentes, on a

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M \quad \text{et} \quad B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(g) = M^{-1}$$

alors $A^{-1} = M^{-1} = B$ et $B^{-1} = (M^{-1})^{-1} = A$; d'où on déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{64} & -\frac{11}{64} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ \frac{17}{64} & \frac{1}{64} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\,B = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exercice 4

Soient $\mathbb{P}_3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 et $\{1, t, t^2, t^3\}$ sa base canonique. On considère les polynômes suivants :

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t) \quad \text{et} \quad B_3^3(t) = t^3.$$

$$H_0^3(t) = (1-t)^2(2t+1), \quad H_1^3(t) = t(1-t)^2, \quad H_2^3(t) = t^2(t-1) \quad \text{et} \quad H_3^3(t) = (-2t+3)t^2.$$

1. Quel est la dimension de $\mathbb{P}_3$? **Justifier**
2. Montrer que $(B_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ et $(H_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ sont deux bases de $\mathbb{P}_3$.
3. Déterminer les matrices A et B dans $\mathbb{R}^{(4\times 4)}$ telles que

$$\begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que A et B sont inversibles, calculer A^{-1} puis calculer le produit matriciel BA^{-1}.
5. En déduire les expressions des polynômes H_i^3 $(i = 0, 1, 2, 3)$ dans la base $(B_i^3)_{i=0,1,2,3}$.

Solution : Considérons $\mathbb{P}_3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 et $\{1, t, t^2, t^3\}$ sa base canonique. On considère les polynômes suivants :

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t) \quad \text{et} \quad B_3^3(t) = t^3.$$

$$H_0^3(t) = (1-t)^2(2t+1), \quad H_1^3(t) = t(1-t)^2, \quad H_2^3(t) = t^2(t-1) \quad \text{et} \quad H_3^3(t) = (-2t+3)t^2.$$

1. Comme $\{1, t, t^2, t^3\}$ est la base canonique de $\mathbb{P}_3$, alors la dimension de $\mathbb{P}_3$ est

$$\dim(\mathbb{P}_3) = \mathrm{Card}(\{1, t, t^2, t^3\}) = 4.$$

2. Montrons que $(B_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ et $(H_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ sont deux bases de $\mathbb{P}_3$: en effet, comme la dimension de $\mathbb{P}_3$ est 4 et les deux familles $(B_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ et $(H_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ sont de cardinal 4, alors il suffut de montrer

que les deux familles $(B_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ et $(H_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ soient libres. Pour cela, un développement de ces polynômes permet d'écrire

$$\begin{array}{rcl} B_0^3(t) & = & (1-t)^3 = 1-3t+3t^2-t^3 \\ B_1^3(t) & = & 3t(1-t)^2 = 3t-6t^2+3t^3 \\ B_2^3(t) & = & 3t^2(1-t) = 3t^2-3t^3 \\ B_3^3(t) & = & t^3 \end{array}$$

Soient α, β, γ et σ des scalaires réels tels que $\alpha\, B_0^3(t)+\beta\, B_1^3(t)+\gamma\, B_2^3(t)+\sigma\, B_3^3(t)=0$; montrons que $\alpha=\beta=\gamma=\sigma=0$? on a

$$\begin{array}{l} \alpha\, B_0^3(t)+\beta\, B_1^3(t)+\gamma\, B_2^3(t)+\sigma\, B_3^3(t) = \\ \alpha\, 1+(-3\alpha+3\beta)\, t+(3\alpha-6\beta+3\gamma)\, t^2+(-\alpha+3\beta-3\gamma+\sigma)\, t^3 = 0 \end{array}$$

or $\{1, t, t^2, t^3\}$ est une famille libre, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ -3\alpha+3\beta & = & 0 \\ 3\alpha-6\beta+3\gamma & = & 0 \\ -\alpha+3\beta-3\gamma+\sigma & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $\alpha=\beta=\gamma=\sigma=0$; ce qui prouve que la famille $\{B_0^3; B_1^3; B_2^3; B_3^3\}$ est libre dans $\mathbb{P}_3$; et comme la dimension de $\mathbb{P}_3$ est $4=\mathrm{Card}\{B_0^3; B_1^3; B_2^3; B_3^3\}$, alors $\{B_0^3; B_1^3; B_2^3; B_3^3\}$ est une base de $\mathbb{P}_3$.

De la même façon, on démontre que la famille $(H_i^3)_{0\leq i\leq 3}$ est une base de $\mathbb{P}_3$. Pour cela, un développement de ces polynômes permet d'écrire

$$\begin{array}{rcl} H_0^3(t) & = & (1-t)^2(2t+1) = 1-3t^2+2t^3 \\ H_1^3(t) & = & t(1-t)^2 = t-2t^2+t^3 \\ H_2^3(t) & = & t^2(t-1) = -t^2+t^3 \\ H_3^3(t) & = & (-2t+3)t^2 = 3t^2-2t^3 \end{array}$$

Soient α, β, γ et σ des scalaires réels tels que $\alpha\, H_0^3(t)+\beta\, H_1^3(t)+\gamma\, H_2^3(t)+\sigma\, H_3^3(t)=0$; montrons que $\alpha=\beta=\gamma=\sigma=0$? on a

$$\begin{array}{l} \alpha\, H_0^3(t)+\beta\, H_1^3(t)+\gamma\, H_2^3(t)+\sigma\, H_3^3(t) = \\ \alpha\, 1+\beta\, t+(-3\alpha-2\beta-\gamma+3\sigma)\, t^2+(2\alpha+\beta+\gamma-2\sigma)\, t^3 = 0 \end{array}$$

or $\{1, t, t^2, t^3\}$ est une famille libre, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ -3\alpha-2\beta-\gamma+3\sigma & = & 0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma-2\sigma & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ -\gamma+3\sigma & = & 0 \\ \gamma-2\sigma & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $\alpha=\beta=\gamma=\sigma=0$; ce qui prouve que la famille $\{H_0^3; H_1^3; H_2^3; H_3^3\}$ est libre dans $\mathbb{P}_3$; et comme la dimension de $\mathbb{P}_3$ est $4=\mathrm{Card}\{H_0^3; H_1^3; H_2^3; H_3^3\}$, alors $\{H_0^3; H_1^3; H_2^3; H_3^3\}$ est une base de $\mathbb{P}_3$.

3. Déterminons les matrices A et B dans $\mathbb{R}^{(4\times 4)}$ telles que

$$\begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

D'après le développement des polynômes de la famille $\{B_0^3; B_1^3; B_2^3; B_3^3\}$ on a

$$\begin{array}{rcl} B_0^3(t) & = & 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\ B_1^3(t) & = & 0.\,1 + 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ B_2^3(t) & = & 0.\,1 + 0.\,t + 3t^2 - 3t^3 \\ B_3^3(t) & = & 0.\,1 + 0.\,t + 0.\,t^2 + t^3 \end{array}$$

alors

$$\begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même, d'après le développement des polynômes de la famille $\{H_0^3; H_1^3; H_2^3; H_3^3\}$ on a

$$\begin{array}{rcl} H_0^3(t) & = & 1.\,1 + 0.\,t - 3t^2 + 2t^3 \\ H_1^3(t) & = & 0\;1 + 1\,t - 2t^2 + t^3 \\ H_2^3(t) & = & 0.\,1 + 0.\,t - 1\,t^2 + 1\,t^3 \\ H_3^3(t) & = & 0.\,1 + 0.\,t + 3\,t^2 - 2\,t^3 \end{array}$$

alors

$$\begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice A s'appelle la **matrice de passage** du système $\{1; t; t^2; t^3\}$ au système $\{B_0^3; B_1^3; B_2^3; B_3^3\}$; et la matrice B s'appelle la **matrice de passage** du système $\{1; t; t^2; t^3\}$ au système $\{H_0^3; H_1^3; H_2^3; H_3^3\}$.

4. Montrons que A et B sont inversibles : les matrices qui ont une configuration comme A s'appellent des matrices triangulaires supérieure car la partie inférieure de A est nulle. Donc le déterminant de ce type de matrices est le produit des éléments qui se trouvent sur la diagonale de la matrice, soit le éterminant de A :

$$\det(A) = 1 \times 3 \times 3 \times 1 = 9 \neq 0$$

d'où A est inversible.

La matrice B n'est pas une matrice triangulaire supérieure car le nombre $3 \neq 0$ se trouve sur la partie inférieure de B ; la matrice B est inversible, en effet,

$$\begin{array}{rcl} \det(B) & = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ & = & 1 \times 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3 \end{array}$$

donc $\det(B) = -1 \neq 0$; d'où B est inversible.
Calculons l'inverse A^{-1} de la matrice A : Pour cela on peut utliser la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{Com}(A^T)$$

où A^T est la transposée de A où bien utiliser le fait que $A\,A^{-1} = I_4$ où I_4 est la matrice identié de taille 4×4. La première remarque qu'on peut faire est que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure, soit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a' & b' & c' \\ 0 & 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

car l'inverse d'une matrice triangulaire supérieur est une matrice triangulaire supérieure ; alors

$$\begin{aligned} A\,A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a' & b' & c' \\ 0 & 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b-3a' & c-3b'+3a'' & d-3c'+3b''-c'' \\ 0 & 3a' & 3b'-6a'' & 3c'-6b''+3c'' \\ 0 & 0 & 3a'' & 3b''-3ac'' \\ 0 & 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \end{aligned}$$

par identification, il vient $a = 1$, $a' = \dfrac{1}{3} = a''$, $c'' = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $b' = \dfrac{2}{3}$, $c' = 1$ et $b'' = 1$; d'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant, calculons le produit matriciel BA^{-1} :

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Les expressions des polynômes H_i^3 $(i = 0, 1, 2, 3)$ dans la base $(B_i^3)_{i=0,1,2,3}$: on a

$$\begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = BA^{-1} \begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix}$$

un calcul simple du produit matrice fois vecteurs, nous donne

$$\begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^3(t) + B_1^3(t) \\ \dfrac{1}{3} B_1^3(t) \\ -\dfrac{1}{3} B_2^3(t) \\ B_2^3(t) + B_3^3(t) \end{pmatrix}$$

d'où on déduit

$$\begin{cases} H_0^3(t) &= B_0^3(t) + B_1^3(t) \\ H_1^3(t) &= \dfrac{1}{3} B_1^3(t) \\ H_2^3(t) &= -\dfrac{1}{3} B_2^3(t) \\ H_3^3(t) &= B_2^3(t) + B_3^3(t) \end{cases}$$

BA^{-1} est la matrice de passage du système $\{B_0^3; B_1^3; B_2^3; B_3^3\}$ au système $\{H_0^3; H_1^3; H_2^3; H_3^3\}$.

$\square$

Exercice 5

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base (e_1, e_2, e_3). A est-elle inversible ?
2. Déterminer Ker(f) et Im(f). Quel est le rang de f ? **Justifier**
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de f, montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel puis déterminer sa base.
4. Déterminer une base de Ker(f) et une base de Im(f), puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
   *Donner une interprétation géométrique à $\mathcal{D}$, Ker(f) et Im(f).
5. Calculer $f \circ f(e_i)$, pour $i = 1, 2, 3$. En déduire l'expression de f^2 en fonction de f.
   *L'endomorphisme f est-il un projecteur ? Trouver la matrice A^2 associée à f^2 relativement à la base (e_1, e_2, e_3).
6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f^n = 3^{n-1} f$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver l'expression de $(I_3 + A)^n$ en fonction de n.
   *Vérifier votre expression pour $n = 3$ en effectuant le produit matriciel.
8. Reprendre la question 7) pour $(I_3 - A)^n$, puis pour $(3I_3 - 2A)^n$.
9. Déterminer le polynôme caractéristique de A, puis trouver ses valeurs propres.

Solution : Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \quad$ et $\quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

1. La matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   La matrice A n'est pas inversible puisque le déterminant de A est nul, à savoir

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-1) - 1(1-1) + 1(1-1) = 0.$$

2. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ avec $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$; on a

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ & = & xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ & = & x(e_1 + e_2 + e_3) + y(e_1 + e_2 + e_3) + z(e_1 + e_2 + e_3) \end{array}$$

donc $f(X) = (x + y + z)e_1 + (x + y + z)e_2 + (x + y + z)e_3$.

– Le noyau Ker(f) de f est Ker$(f) = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$; alors le noyau Ker(f) de f est

$$\text{Ker}(f) = \{X = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}\cdot$$

– L'image Im(f) de f est Im$(f) = \{f(X) \,/\, X \in \mathbb{R}^3\}$; on a $f(X) = \alpha(e_1 + e_2 + e_3)$ où $\alpha = x + y + z$; d'où

$$\text{Im}(f) = \{\alpha(e_1 + e_2 + e_3) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ce qui montre que Im(f) est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ des vecteur colinéaires au vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$.

– Le rang $\text{rg}(f)$ de f est la dimension de Im$(f) = f(\mathbb{R}^3)$; ce qui montre que $\text{rg}(f) = 1$.

3. – Par définition, l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de f est $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(X) = X\}$; alors

$$f(X) = X \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = x \\ x + y + z = y \\ x + y + z = z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

d'où $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = 0_{\mathbb{R}^3} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; ce qui prouve que $\mathcal{D}$ est l'ensemble réduit au $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

– L'ensemble $\mathcal{D}$ est le sous-espace vectoriel trivial réduit au $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et sa base est par convention $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ formée du vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.

4. – le noyau Ker(f) de f est Ker$(f) = \{X = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$,
alors $x + y + z = 0 \ \Leftrightarrow \ z - x - y$; donc

$$X = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x(e_1 - e_3) + y(e_2 - e_3)$$

on pose $v_1 = e_1 - e_3$ et $v_2 = e_2 - e_3$; alors Ker$(f) = \{\alpha v_1 + \beta v_2 \in \ \ / \, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$
d'où est le plan vectoriel engendré par le système $\{v_1, v_2\}$ où $v_1 = e_1 - e_3$ et $v_2 = e_2 - e_3$; ce qui prouve que le système $\{v_1, v_2\}$ est une base de Ker(f).

– L'image Im(f) de f est Im$(f) = \{f(X) \,/\, X \in \mathbb{R}^3\}$; on a $f(X) = \alpha(e_1 + e_2 + e_3)$ où $\alpha = x + y + z$; d'où

$$\text{Im}(f) = \{\alpha(e_1 + e_2 + e_3) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ce qui montre que Im(f) est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $u = e_1 + e_2 + e_3$.

– L'ensemble $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = 0_{\mathbb{R}^3} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ est l'espace vectoriel réduit au $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. D'où $\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel trivial réduit au $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, d'où $\mathcal{D} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ est l'espace vectoriel nul.

– Montrons que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$; en effet, d'abord Ker(f) est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont le système $\{v_1, v_2\}$ où $v_1 = e_1 - e_3$ et $v_2 = e_2 - e_3$ est une base ; et Im(f) est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont le système $\{u\}$ où $u = e_1 + e_2 + e_3$ est une base ; alors le système $\{u, v_1, v_2\}$ est un système libre dans $\mathbb{R}^3$, donc la famille $\{u, v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$; donc pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, il existe α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que $X = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma u = Y + Z$ où $Y = \alpha v_1 + \beta v_2 \in \text{Ker}(f)$ et $Z = \gamma u \in \text{Im}(f)$; d'où $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Il reste à montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, soit $X \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, alors $X \in \text{Ker}(f)$ et $X \in \text{Im}(f)$; donc

$$\left\{ \begin{array}{l} X = f(Y) = \alpha(e_1 + e_2 + e_3) \quad \text{où} \quad Y \in \mathbb{R}^3 \\ f(X) = \alpha(f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)) = 3\alpha(e_1 + e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{array} \right.$$

d'où $\alpha = 0$; ce qui prouve que $X = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, et comme $0_{\mathbb{R}^3} \in \text{Ker}(f)$ et $0_{\mathbb{R}^3} \in \text{Im}(f)$, alors $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$; d'où $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Finalement, on a $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

5. – Calculons $f \circ f(e_i)$, pour $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{array}{rcl} f \circ f(e_i) & = & f(e_1 + e_2 + e_3) \\ & = & f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ & = & 3f(e_i) \quad \text{car } f(e_i) = e_1 + e_2 + e_3 \ \ \forall i = 1, 2, 3 \end{array}$$

d'où $f \circ f(e_i) = 3f(e_i)$ pour tout $i = 1, 2, 3$.

– L'expression de f^2 en fonction de f : soit $X \in \mathbb{R}^3$ avec $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$, alors

$$\begin{array}{rcl} f \circ f(X) & = & f(xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)) \\ & = & xf^2(e_1) + yf^2(e_2) + zf^2(e_3) \\ & = & 3xf(e_1) + 3yf(e_2) + 3zf(e_3) \\ & = & 3f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \end{array}$$

d'où $f \circ f(X) = 3f(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$; finalement $f \circ f = f^2 = 3f$.

– L'endomorphisme f n'est pas un projecteur, car sinon $f = f^2 = 3f$ soit $2f = 0$ l'endomorphisme nul c'est à dire que f est l'endomorphisme nul ce qui contredit les hypothèses.

– La matrice A^2 associée à f^2 relativement à la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$: on a

$$A^2 = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3A.$$

6. – Montrons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f^n = 3^{n-1}f$: Pour $n = 1$, alors $f^1 = f = 3^3 f = 1f = f$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$,
Supposons que $f^{n-1} = 3^{n-1-1}f$, alors $f^n = f \circ f^{n-1}$, donc pour tout $X \in \mathbb{R}^3$

$$f^n(X) = f \circ f^{n-1}(X) = f(3^{n-1-1}f(X)) = 3^{n-1-1}f \circ f(X) = 3^{n-1-1}.3f(X) = 3^{n-1}f(X)$$

donc $f^n = 3^{n-1}f$, ce qui montre que la propriété est vraie pour l'étape n.
D'après la propriété de récurrence, on a on a $f^n = 3^{n-1}f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

– L'expression de A^n en fonction de n : on a $f^n = 3^{n-1}f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors la matrice A^n de l'application f^n relativement à la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A^n = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^n) = 3^{n-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = 3^{n-1}A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la formule du Binôme pour les matrices on a l'expression suivante

$$(I_3 + A)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k A^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^{k-1} A = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^{k-1} \right) A$$

d'où on obtient $(I_3 + A)^n = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} \mathrm{C}_n^k \right) A$.

Pour $n = 3$, alors

$$(I_3 + A)^3 = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{3} 3^{k-1} \mathrm{C}_3^k \right) A = I_3 + 21 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $(I_3 + A)^3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$

8. – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la formule du Binôme pour les matrices on a l'expression suivante

$$(I_3 - A)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k A^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k 3^{k-1} A = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k 3^{k-1} \mathrm{C}_n^k \right) A$$

d'où $(I_3 + A)^n = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k 3^{k-1} \mathrm{C}_n^k \right) A.$

Pour $n = 3$, alors

$$(I_3 + A)^3 = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{3} (-1)^k 3^{k-1} \mathrm{C}_3^k \right) A = I_3 - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $(I_3 - A)^3 = - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la formule du Binôme pour les matrices on a l'expression suivante

$$(3I_3 - 2A)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-2)^k 3^{n-k} A^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-2)^k 3^{n-k} 3^{k-1} A = I_3 + 3^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-2)^k \mathrm{C}_n^k \right) A$$

d'où $(3I_3 - 2A)^n = I_3 + 3^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-2)^k \mathrm{C}_n^k \right) A.$

Pour $n = 3$, alors

$$(3I_3 - 2A)^3 = I_3 + 3^2 \left(\sum_{k=1}^{3} (-2)^k \mathrm{C}_3^k \right) A = \frac{64}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $(3I_3 - 2A)^3 = I_3 - 18 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 17 & 18 & 18 \\ 18 & 17 & 18 \\ 18 & 18 & 17 \end{pmatrix}$

9. Par définition, le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(x^2 - 2x) + 2x \end{aligned}$$

d'où $P_A(x) = -x^2(x-3)$. La matrice A a pour valeurs propres $\lambda_1 = 0$ d'ordre de multiplicité 2 et $\lambda_2 = 3$ d'ordre de multiplicité 1.
On en déduit que le spectre de A^n est $\mathrm{Sp}(A) = \{0; 3^n\}$; en effet, $P_{A^n}(x) = 3^{3(n-1)} P_A\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)$, alors $P_{A^n}(x) = 0$ est équivalent à $P_A\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) = 0$; d'où $\frac{x}{3^{n-1}} = 0$ où bien $\frac{x}{3^{n-1}} = 3$; soit $x = 0$ où bien $x = 3^n$.

□

Exercice 6

Soit a un nombre réel, on considère le système d'équations linéaires suivant

$$(\mathcal{P}) : \left\{ \begin{array}{c} x + ay + a^2 z = 1 \\ ax + y + az = -1 \\ a^2 x + ay + z = 1 \end{array} \right.$$

*Montrer que le système $(\mathcal{P})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \notin \{-1, 1\}$. Dans ce cas, résoudre le système $(\mathcal{P})$ par la méthode de Gauss.

*Discuter l'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ dans le cas $a=-1$ et dans le cas $a=1$ (Toujour par la méthode de Gauss). L'ensemble de solutions $\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : Pour a un nombre réel, considèrons le système d'équations linéaires suivant

$$(\mathcal{P}) : \left\{ \begin{array}{c} x + ay + a^2 z = 1 \\ ax + y + az = -1 \\ a^2 x + ay + z = 1 \end{array} \right.$$

1. – Montrons que le système $(\mathcal{P})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \notin \{-1, 1\}$: en effet le système $(\mathcal{P})$ est équivalent au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit $A\,X = b$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Le système $(\mathcal{P})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ ou le déterminant de A est $\det(A) = (1-a^2)^2 = (1-a)^2(1+a)^2$;
or $\det(A) = (1-a^2)^2 = (1-a)^2(1+a)^2 = 0$ entraine $a=-1$ où bien $a=1$;
d'où le système $(\mathcal{P})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \notin \{-1, 1\}$.

– Pour $a \notin \{-1, 1\}$, résolvons le système $(\mathcal{P})$ par la méthode de Gauss : en effet la méthode d'élimination de Gauss consiste à triangulariser le système matriciel $A\,X = b$ qui se fait en des étapes

$1^{\text{ère}}$ **étape** :

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & a^2 & & 1 \\ a & 1 & a & | & -1 \\ a^2 & a & 1 & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1^{(0)} \\ \mathrm{L}_2^{(0)} \\ \mathrm{L}_3^{(0)} \end{array}$$

$2^{\text{ème}}$ **étape** :

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & a^2 & & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 & | & -a-1 \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 & & 1-a^2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1^{(1)} = \mathrm{L}_1^{(0)} \\ \mathrm{L}_2^{(1)} = -a\mathrm{L}_1^{(0)} + \mathrm{L}_2^{(0)} \\ \mathrm{L}_3^{(1)} = -a^2\mathrm{L}_1^{(0)} + \mathrm{L}_3^{(0)} \end{array}$$

$3^{\text{ème}}$ **étape** :

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & a^2 & & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 & | & -(a+1) \\ 0 & 0 & a^2-1 & & -(a+1) \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1^{(2)} = \mathrm{L}_1^{(1)} \\ \mathrm{L}_2^{(2)} = \mathrm{L}_2^{(1)} \\ \mathrm{L}_3^{(2)} = -a\mathrm{L}_2^{(1)} + \mathrm{L}_3^{(1)} \end{array}$$

donc résoudre le système $(\mathcal{P})$ est équivalent à résoudre le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(a+1) \\ -(a+1) \end{pmatrix}$$

d'où la solution suivante

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x & = & 1 - ay - a^2 z = \dfrac{1}{1-a} \\ y & = & \dfrac{1}{a^2-1}\left(a+1+\dfrac{a^3-a}{a-1}\right) = \dfrac{a+1}{a-1}, \\ z & = & \dfrac{a+1}{1-a^2} = \dfrac{1}{1-a} \end{array} \right.$$

soit l'ensemble de solutions $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{a+1}{a-1}, \dfrac{1}{1-a} \right) \right\}$.

– La décomposition LU de la matrice du système $(\mathcal{P})$: en effet, la décomposition en traversant les 3 étapes ci-dessus, on obtient

$$L_2 L_1 A = U$$

où $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$;

d'où la décomposition LU de la matrice $A = L\,U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a^2-1 & a^3-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et L est la matrice triangulaire inférieure donnée par

$$L = (L_2 L_1)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

on vérifie facilement que

$$L\,U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix} = A.$$

2. – Si $a = -1$, alors la troisième étape d'élimination de Gauss implique

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

soit à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui implique le système équivalent suivant

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \qquad\quad 0 = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

alors l'ensemble E_{-1} des solutions du système $(\mathcal{P})$ est

$$E_{-1} = \{(x, y, 1 - x + y) \;/\; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puisque $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin E_{-1}$. D'où, si $a = -1$, alors le système $(\mathcal{P})$ admet une infinité de solutions.

– Si $a = 1$, alors la troisième étape d'élimination de Gauss implique

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

soit à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ce qui implique le système équivalent suivant

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 0=-2 \\ 0=-2 \end{array}\right.$$

qui est un système impossible car $0 \neq -2$; alors l'ensemble E_1 des solutions du système $(\mathcal{P})$ est vide, soit $E_1 = \emptyset$ qui ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
D'où, si $a = 1$, alors le système $(\mathcal{P})$ n'admet plus de solutions.

$\square$